I. Crecimiento Económico-El Modelo de Solow.

A. Los hechos que queremos explicar

1. ***Hecho 1-Niveles de PIB por persona son muy diferentes a través de los países.***

2. ***Hecho 2-Tasas de crecimiento varían muchas a través de los países.***

B. Supuestos del modelo

1. ***No hay gobierno y ni sector externo***

2. ***Tecnología es constante (vamos a cambiar este supuesto más adelante).***

3. ***Función de producción agregada*** $Y = F(K,L)$

   a) **La cantidad de producción agregada (PIB real) depende de las cantidades de capital, K, y trabajo, L, empleadas.**

   b) **Tiene rendimientos constantes de escala RCE**

      (1) Sea $z > 1$

      (2) Una función de producción tiene RCE si $F(zK,zL) = zF(K,L) = zY$

      (3) Ejemplo de Cobb-Douglas $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1$

      (4) La propiedad de RCE significa que podemos transformar la función de producción agregada a una de producción por persona.

         (a) Con el ejemplo anterior, supongamos que $z = \frac{1}{L}$

         (b) Entonces $F\left(\frac{K}{L},\frac{L}{L}\right) = F\left(\frac{K}{L},1\right) = f(k)$

         (c) Ejemplo de Cobb-Douglas

(i) Sea $Y = K^{1/2}L^{1/2}$ K=40 y L 10
entonces Y = 20 y $\frac{Y}{L} = \frac{20}{10} = 2$

(ii) $\frac{Y}{L} = \frac{K^{1/2}L^{1/2}}{L^{1/2}L^{1/2}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = k^{1/2} = \left(\frac{40}{10}\right)^{1/2}$

c) Los productos marginales de capital y trabajo son positivos y decrecientes.

(1) $PMK = \frac{\Delta Y}{\Delta K}, PML = \frac{\Delta Y}{\Delta L}$

(a) El producto marginal de capital es el cambio de producción (ΔY) cuando hay un cambio pequeño de capital (ΔK)

(b) El producto marginal de trabajo es el cambio de producción (ΔY) cuando hay un cambio pequeño de trabajo (ΔL)

(2) Es posible mostrar $PMK = \frac{\Delta Y}{\Delta K} = \frac{\Delta y}{\Delta k}$

(3) Intuición por PMK, PML decreciente

(4) Las gráficas

4. Implicaciones de los supuestos tions of the assumptions for the model

a) No hay gobierno ni sector externo

(1) PIB es C+I=Y

(2) Consumo y ahorro son los únicos usos C+S=Y

(3) Entonces S=I simpre.

b) Población y tecnología son constantes

c) Función de producción Y = F(K,L)

(1) Los productos marginales de capital y trabajo son positivos y decrecientes.

(2) Rendimientos constantes de escala

(a) Definición cualquier z > 0, RCE significa F(zK,zL) = zY

(b) Let $z = \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = f(k) = y$

letras minúsculas son por persona. L = número de trabajadores y la población.

(c) Ejemplo de la función de Cobb-Douglas $\frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = k^{\alpha}$

(3) Dado los supuestos la función de producción por persona aparece como la función agregada.

d) Tasa de ahorro es constante, s. 0 < s < 1

(1) Ahorro total sY=S

(2) Ahorro por persona sy.

(3) Función de ahorro

(a) Dado y = f(k), sy = sf(k).

(i) Gráfica

(ii) Ejemplo de CD $sy = sk^{\alpha}$

(b) Mitad del modelo básico

e) Tasa de depreciación es constante

(1) Tenemos que usar los subíndices para el tiempo porque capital cambia a través el tiempo.

(2) Inversión neta $I_t - \delta K_{t-1} = K_t - K_{t-1}$

(3) Inversión bruta $I_t = K_t - K_{t-1} + \delta K_{t-1}$

(4) El capital de periodo t tiene dos partes $I_t + K_{t-1} - \delta K_{t-1} = I_t + \left(K_{t-1} - \delta K_{t-1}\right) = I_t + \left(1-\delta\right)K_{t-1} = K_t$

(a) $(1-\delta)K_{t-1}$ **cantidad restante del periodo anterior**

(b) Cantidad de inversión bruta, I_t

(5) Para obtener cantidades por persona, nada más dividimos por L. El supuesto de población constante simplifica eso, matemáticamente.

(a) $\frac{I_t}{L} - \delta\frac{K_{t-1}}{L} = \frac{K_t}{L} - \frac{K_{t-1}}{L} = i_t - \delta k_{t-1} = k_t - k_{t-1}$

inversión neta por persona.

(b) $\frac{I_t}{L} = \frac{K_t}{L} - \frac{K_{t-1}}{L} + \delta\frac{K_{t-1}}{L} = i_t = k_t - k_{t-1} + \delta k_{t-1}$

inversión bruta por persona.

(6) Ejemplo-marcadores

(a) Sea δ = .25. L = 1 (yo).

Periodo t	k_t	k_{t-1}	δk_{t-1}	i_t
1	4	--	--	--
2	6	4	1	3
3	8	6	1.5	3.5
4	6	8	2	0
5	6	6	1.5	1.5
6	6	6	1.5	1.5

(b) Gráfica con capital en el eje horizontal y capital depreciada en el eje vertical.

5. Modelo completo

a) Función de ahorro por persona sf(k)

b) Función de depreciación δk

c) Gráfica.

(1) La variable clave es k.

(2) Cuando sepamos el valor de la variable endógena k, sabemos todo lo demás.

(a) Producción (ingreso) por persona y=f(k)

(b) Ahorro por persona

(c) Consumo por persona

(3) Estado estacionario

(a) Definición general-una situación en la cual la(s) variable(s) endógenas crecen a una tasa de cero (a través el tiempo)

(b) En esta versión del modelo de Solow el estado estacionario sucede cuando capital por persona es constante (su tasa de crecimiento es cero).

d) Estabilidad del estado estacionario, k*

(1) If $sf(k) > \delta k$, el k actual es menor que k^* entonces inversión neta es positiva y k crece.

(2) If $sf(k) < \delta k$, el k actual es mayor que k^* entonces inversión neta es positiva y k crece.

(3) Cualquier desviación de k de su valor del estado estacionario produce cambios que causan movimiento al estado estacionario.

e) Cambios de k*

(1) Cambio de δ

(2) Cambio de s o f(k)

f) Si suponemos que la tasa de depreciación y la tecnología son los mismos a través los países entonces las diferencias de ingreso por persona suceden de diferencias de la tasa de ahorro.

6. Convergencia

a) Hemos visto que el estado estacionario es estable.

b) Otro diagrama.

(1) El cambio de capital es $i - \delta k = \Delta k$

(2) Dividimos las funciones de ahorro (inversión) y depreciación por persona por la cantidad de capital por persona para obtener la tasa de crecimiento de capital $\frac{sf(k)}{k} - \delta = \frac{\Delta k}{k}$ *Se eliminaron los subíndices porque se requiere el calculo para hacer correctamente en sentido matemático estos pasos.*

(3) Resultado-la tasa de crecimiento de capital es la diferencia entre los dos nuevas funciones.

(a) Es posible mostrar que $\frac{sf(k)}{k}$ **tiene pendiente negativa, dado nuestros supuestos sobre la función de producción.**

(b) Gráfica

(4) Ejemplo $y = k^{\alpha}$ *nos da inversión neta*

$$sk^{\alpha} - \delta k = \frac{dk}{dt} = \dot{k}$$

(5) Tasa de crecimiento de capital $sk^{\alpha-1} - \delta = \frac{\dot{k}}{k}$

(a) δ es constante

(b) $sk^{\alpha-1}$ **es una función decreciente en k, tiene pendiente negativa.**

(c) En la gráfica, la tasa de crecimiento es la distancia entre $sk^{\alpha-1}$ **y δ.**

*(i) Positiva si k < k**

*(ii) Negativa si k > k**

c) Predicción del modelo-Convergencia absoluta

(1) Obsérvense de la gráfica anterior, los más lejos de su estado estacionario (supongamos k < k) lo más rápido su tasa de crecimiento.*

(2) Sean dos países, A y B, con el mismo k, y A tiene menos capital por persona que B.*

(a) El valor de capital por persona del estado estacionario, k*, es el mismo porque su tecnología y tasas de depreciación son las mismas.

(b) Dado $k_A < k_B < k^*$ la tasa de crecimiento de y en país A es más rápido que país B porque la tasa de crecimiento de k_A es más alta. Convergencia absoluta

(3) Convergencia absoluta implica que un país pobre deben tener una tasa de crecimiento más alta que ella de un país rico.

d) Predicción del modelo convergencia condicional

(1) Sean dos países, A y B, con niveles diferentes de k, digamos $k_A{}^*$ y $k_B{}^*$. Ambos tiene k menor que k**

(a) El valor de capital por persona del estado estacionario, k*, puede ser diferente porque sus tecnologías o tasas de ahorro son diferentes. No parece muy probable que tasas de depreciación diferentes explican crecimiento económico.

(b) Si el nivel actual de k es más lejos de su estado estacionario en país A ($k^*-k_A > k^*- k_B$) la tasa de crecimiento de y en país A es más rápido que país B porque la tasa de crecimiento de k_A es más alta.

(i) Convergencia condicional

(ii) Nótense que país A puede ser más rico que país B. Solo importa la distancia del estado estacionario.

7. ¿Cómo explica el modelo de Solow en la forma presentada los primeros dos hechos de crec eco?

a) Hecho 1-diferentes niveles del PIB

(1) Si f(k) es la misma en todos los países, la razón según el modelo de Solow es niveles diferentes de capital por persona.

(a) En el estado estacionario depende de la tasa de ahorro

(b) En el estado estacionario depende de la tasa de depreciación

(2) La tasa de crecimiento de la población puede ser diferente. Intuición.

b) Hecho 2-tasas de crecimiento varían mucho

(1) Unos países son más lejos de su estado estacionario que otros, entonces crecen más rápidos

(a) Convergencia absoluta-misma k*

(b) Convergencia condicional-diferentes k*

(2) Sin embargo cuando una economía está en su estado estacionario, el nivel de y es constante. Es decir, la economía no crece.

(a) Este implicación del modelo de Solow no es consistente con la evidencia de países maduros como EUA, Inglaterra, Francia, etc.

(b) En este forma el modelo de Solow no explica crecimiento económico sostenido al largo plazo

(c) Tenemos que modificar el modelo.

C. El modelo de Solow con crecimiento de población

1. Supuesto adicional

a) Población/Trabajo crece a la tasa constante y exógena, n.

b) $L_t = (1+n)L_{t-1}$

2. Cambios del modelo básico

a) Función de inversión/ahorro por persona es la misma

b) Se modifica la función de depreciación. Ahora se denomina función de reposición de capital

3. Pasos para obtener inversión por persona

a) Dividimos por $L_t = (1+n)L_{t-1}$

b)

$$\frac{I_t}{L_{t-1}(1+n)} - \delta\frac{K_{t-1}}{L_{t-1}(1+n)} = \frac{K_t}{L_t} - \frac{K_{t-1}}{L_{t-1}(1+n)} =$$

$$\frac{i_t}{(1+n)} - \delta\frac{k_{t-1}}{(1+n)} = k_t - \frac{k_{t-1}}{(1+n)}$$

inversión neta por persona. Hicimos un poquito de trampa matemática aquí.

(1) Definimos $\frac{I_t}{L_{t-1}} = i_t$

(a) Una justificación es imaginar que se toma la decisión de invertir en periodo t al final de periodo t-1 cuando la población es L_{t-1}.

(b) Alternativamente, pueden aceptar el hecho que el problema existe solo porque usamos matemáticas de tiempo discreto. Con tiempo continuo y calculo no tendríamos el problema.

(2) Condición del estado estacionario

$$k^* - \frac{k^*}{(1+n)} = \frac{nk^*}{(1+n)} \Rightarrow \frac{i_t}{(1+n)} = \frac{\delta k^* + nk^*}{(1+n)} \Rightarrow$$

$$i_t = (\delta + n)k^*$$

(a) Como antes inversión por persona y ahorro por persona son iguales $i_t = sf(k_t)$

(b) Ahora no solo la tasa de depreciación pero la tasa de crecimiento de la población afecta la reposición de capital

(c) Ejemplo

(i) K_{t-1} = 100, L_{t-1} = 50 entonces capital por persona es 2.

(ii) Supongamos que δ = .1 y n = .02.

(iii) En periodo t va a ser 51 personas.

(iv) Para mantener constante capital por persona, necesitamos 102 unidades de capital, 10 para reponer el capital depreciado el periodo anterior y 2 unidades adicionales porque hay una persona más en la economía.

c) **Gráfica.**

d) **Crecimiento en el estado estacionario**

(1) Como antes, k^* no crece entonces y^* no crece.

(2) Sin embargo capital y ingreso total en el estado estacionario crecen a la tasa n. Tienen que hacerlo para mantener constante capital por persona y ingreso por persona porque hay más población.

D. El modelo de Solow con crecimiento de tecnología

1. Solow reconocía que su modelo no explicó crecimiento sostenido de ingreso por persona sin crecimiento de la tecnología.

2. Supuestos adicionales

a) Para simplificar la presentación población/trabajo no crece.

b) Tecnología crece a la tasa constante y exógena, g.

(1) Tecnología mejora el trabajo.

(2) Trabajo en unidades de eficiencia, EL.

(3) Podemos pensar de capacitación, estudios etc. aumentan E.

(a) Sea E = 1, trabajador sin habilidades excepto trabajo básico.

(b) Cuando E aumenta cada persona puede hacer más trabajo

(4) $E_t = (1+g)E_{t-1}$

3. Cambios del modelo básico

a) En lugar de valores por persona, hablamos de valores por unidad de trabajo efectivo. $\frac{K_t}{E_t L_t} = k_t$ **por ejemplo.**

b) Se modifica la función de reposición para incluir los efectos de tecnología. Ahora se denomina función de reposición de capital

4. Pasos para obtener inversión por persona

a) Dividimos por $E_t L = (1+g)E_{t-1}L$

b)
$$\frac{I_t}{E_{t-1}L(1+g)} - \delta\frac{K_{t-1}}{E_{t-1}L(1+g)} = \frac{K_t}{E_t L} - \frac{K_{t-1}}{E_{t-1}L(1+g)} =$$
$$\frac{i_t}{(1+g)} - \delta\frac{k_{t-1}}{(1+g)} = k_t - \frac{k_{t-1}}{(1+g)}$$

inversión neta por persona. Hicimos un poquito de trampa matemática aquí, como antes.

(1) Definimos $\frac{I_t}{E_{t-1}L} = i_t$

(a) Una justificación es imaginar que se toma la decisión de invertir en periodo t al final de periodo t-1 cuando la tecnología es E_{t-1}**.**

(b) Alternativamente, pueden aceptar el hecho que el problema existe solo porque usamos matemáticas de tiempo discreto. Con tiempo continuo y calculo no tendríamos el problema.

(2) Condición del estado estacionario

$$k^* - \frac{k^*}{(1+g)} = \frac{nk^*}{(1+g)} \Rightarrow \frac{i_t}{(1+g)} = \frac{\delta k^* + nk^*}{(1+g)} \Rightarrow$$
$$i_t = (\delta + g)k^*$$

(a) Como antes inversión por persona y ahorro por persona son iguales $i_t = sf(k_t)$

(b) Ahora no solo las tasas de depreciación y crecimiento de la población pero la tasa de crecimiento de la tecnología afecta la reposición de capital

(c) Ejemplo

(i) K_{t-1} = 100, L_{t-1} = 50 Sea E_{t-1} = 2 entonces capital por unidad de trabajo efectivo es 1. Nótense que capital por persona, k_{t-1}, es 2.

(ii) Supongamos que δ = .1 y g = .25.

(iii) En periodo t la economía tiene 50 personas con E_t = 2.5

(iv) Para mantener constante capital por unidad de trabajo efectivo $E_{t-1}L_{t-1}$ = (2.5)(50) = 125, necesita 125 unidades de capital, así inversión de 35.

(a) 10 unidades de K para reponer el capital depreciado el periodo anterior

(b) 25 unidades adicionales de K porque cada persona es más productivo en términos de unidades de eficiencia de trabajo.

(v) En periodo t

(a) Capital por unidad de trabajo efectivo es constante, $k_t = 1$.

(b) Capital por persona aumenta $\frac{K_t}{L_t} = \frac{125}{50} = 2.5$***, creció a la tasa .25 o 25%, es decir a la tasa g.***

(c) Capital total aumenta 25 unidades, 25% también, la misma tasa como capital por persona porque la tasa de crecimiento de la población es cero.

c) Gráfica.

d) Crecimiento en el estado estacionario.

(1) Como antes, k^* no crece entonces y^* no crece. Recuérdense que k^* y y^* representan valores del estado estacionario en unidades de trabajo efectivo.

(2) También, recuérdense que las tasas de crecimiento de capital y ingreso total son las mismas en el estado estacionario. También por las tasas de crecimiento por persona.

(3) Tasa de crecimiento de capital y ingreso por persona.

(a) $\left(\frac{K}{L}\right)^* = Ek^*$ **entonces capital por persona tiene que aumenta a la misma tasa como E, para mantener constante la razón.**

(b) $\left(\frac{Y}{L}\right)^* = Ey^*$ **entonces ingreso por persona tiene que aumenta a la misma tasa como E, para mantener constante la razón.**

(4) Tasa de crecimiento de capital y ingreso total en el estado estacionario crecen a la tasa (n+g). Tienen que hacerlo para mantener constante capital y ingreso por unidad de trabajo efectivo porque hay más población (L↑) y la población es más productiva (E↑).

II. Crecimiento Endógeno-Modelo AK.

A. Problemas

1. Hemos visto que el modelo de Solow no explica crecimiento económico sostenido a largo plazo sin tecnología exógena.

a) Este problema sucede en cualquier modelo neoclásico, es decir con la características de la función de producción que usábamos en el modelo de Solow.

b) Es posible mostrar que los dueños de capital y los trabajadores reciben, como compensación, todo el ingreso real con la función neoclásico.

c) Otra intuición-no hay rendimientos a ellos que crean la nueva tecnología porque cualquier otra empresa, en el mundo neoclásico, puede copiar y usar la idea.

(1) ¿Quién gastaría millones de dólares o euros o pesos para desarrollar nuevas medicamentos, si cualquier otra empresa pudiera copiar el medicamento?

(2) ¿Quién gastaría millones para desarrollar mejores teléfonos celulares si cualquier otra empresa pudiera copiar la tecnología?

(3) Hay protecciones de patentes etc. para proteger la innovación en el mundo real.

2. Para comprender mejor los puntos por arriba, vamos a examinar un modelo muy sencillo con una función de producción muy diferente.

a) No requiere tecnología exógena para generar crecimiento sostenido.

b) Modelo AK (función de producción)

(1) Y = AK, A es constante y positivo

(2) Fácil transformar al producción por persona

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK}{L} = y = Ak$$

(a) PMK es A, constante.

(b) Una unidad más de capital (total o por persona) significa A unidades más de producción (total o por persona).

(3) Como el modelo de Solow

(a) Depreciación sucede a una tasa constante δ

(b) Tasa de ahorro es constante, s.

(c) No hay avances tecnológicas ni crecimiento de la población.

(4) Gráfica-producción por persona

(5) Gráfica-ahorro por persona

(6) Gráfica-ahorro/inversión por persona con función de depreciación.

3. Crecimiento económico

a) Si sAk > δk, la cantidad de capital crece para siempre. $sAk - \delta k = \Delta k > 0$ **Así, el ingreso por persona crece para siempre.**

b) sA-δ > 0 es la tasa de crecimiento de capital por persona. $sA - \delta = \frac{\Delta k}{k} > 0$ **Otra gráfica.**